# TEORÍA DE CONJUNTOS


*Acastello Maria Luján*

*Pérez María Lucrecia*


*Año 2010*

Nos pareció justo trabajar con “teoría de conjuntos” ya que a partir de las concepciones que de ella se desprenden, se ha tratado de justificar el origen de la matemática. Esta teoría es una rama de la matemática relativamente moderna cuyo propósito es estudiar unas entidades llamadas **conjuntos**, aunque otra parte de la misma es conocida como los fundamentos mismos de la matemática, La teoría de conjuntos fue desarrollada por Georg Cantor a fines del siglo XIX a partir de ciertas conclusiones hechas por él mismo, al reflexionar en algunos detalles de las series trigonométricas de Fourier.

Este tema ha sido excluido de los proyectos curriculares, sin justificativo y nos resulto ilógico el hecho de no estudiar el lenguaje unificador de la matemática. Es por eso que propusimos una planificación sujeta a alteraciones, según el curso donde se desee trabajarla, de este tema. Nuestra planificación fue pensada para alumnos de los primeros años de secundaria; consta de explicaciones teóricas, actividades introductorias, implementación de recursos didácticos como afiches, juegos,… también actividades de fijación y dos trabajos prácticos para cerrar el tema.

## CONCEPTO:

¿Qué es un conjunto?

“Es una colección finita de objetos”

¿Y qué es una colección finita de objetos?

“Es una reunión de objetos”

¿Y qué es una reunión?

“Es una agrupación de objetos”

¿Y qué es una agrupación de objetos?

“Es un conjunto de objetos”

Si pretendemos definir todos los términos entramos en un círculo vicioso. Los matemáticos evitan este problema eligiendo algunos términos que aceptan sin definir, los cuales reciben el nombre de “conceptos primitivos”. El concepto de conjunto va a ser uno de ellos.

## VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS DE CONJUNTOS:

- Tu cartuchera está compuesta por: lápiz, lapicera, lápices de colores, sacapuntas, tijera, etc.
- El sistema solar está compuesto por: el sol, la luna, asteroides, los planetas, etc.
- Los equipos de fútbol que juegan en primera son: River, Boca, Lanus, Independiente, San Lorenzo, etc.

Tu cartuchera, el sistema solar, los equipos de fútbol son algunos ejemplos de conjuntos, el lápiz, el sol, Boca son llamados elementos de los conjuntos.

Ahora bien:

El lápiz pertenece a tu cartuchera.

San Lorenzo pertenece a los quipos de fútbol.

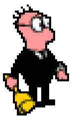
¿Marte pertenece a tu cartuchera?

Hemos usado sin definir dos conceptos más: elementos y pertenencia. Por lo que también lo vamos a considerar conceptos primitivos.

## ACTIVIDAD Nº 1:

- Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.
    a) La pera pertenece al conjunto de las frutas.
    b) Un zapato pertenece al conjunto de las frutas.
    c) La zanahoria pertenece al conjunto de las frutas.
    d) Argentina pertenece a América del sur.
    e) España pertenece a América del sur.
    f) Estados Unidos pertenece a América del Sur.

**NOTACIÓN:**



Los matemáticos, para simplificar la escritura establecen ciertas convenciones para que todos puedan entender un mismo material. En este tema tendremos en cuenta las siguientes:

a) Los términos que forman un conjunto se encierran entre llaves.

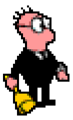
b) Los conjuntos se designan con letra mayúscula imprenta, por ejemplo: A= {Nokia, Samsung, Motorola}, donde A es el conjunto de marcas de celulares.

c) Los elementos se designan con letra imprenta minúscula. Los elementos del conjunto A serán: n= Nokia, s= Samsung, m= motorola. Entonces el conjunto A= {n,s,m}.

d) Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el signo "$\in$" y para indicar que no pertenece utilizaremos "$\notin$", por ejemplo: si n=Nokia entonces $n \in A$ y se lee "n pertenece a A". Si p= Philips entonces $p \notin A$ y se lee "p no pertenece a A".

## EXPRESIÓN DE CONJUNTOS:

Existen diferentes formas de expresar un conjunto. En ocasiones es más sencillo determinarlo nombrando cada uno de los elementos que pertenecen a el. Cuando se enumeran uno a uno los elementos que conforman un determinado conjunto lo estamos expresando por EXTENSIÓN.



Por ejemplo el conjunto compuesto por {a, e, i, o, u}. Pero en ocasiones los conjuntos están formados por una gran cantidad de elementos difíciles de enunciar. En estos casos se puede expresar el conjunto por alguna propiedad que compartan todos sus elementos. Los conjuntos así mencionados están expresados por COMPRENSIÓN. Por ejemplo A={x / x es consonante del abecedario} , este conjunto se lee “A es el conjunto de todas las x tal que x es consonante del abecedario”

### ACTIVIDAD Nº 2

- Expresa por extensión los siguientes conjuntos:
  a) A= Los días de la semana
  b) B= Los planetas del sistema solar.
  c) C= La clasificación de los triángulos según sus lados.

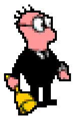
### ACTIVIDAD Nº 3

- Expresa los siguientes conjuntos por comprensión:
  a) D= {a,e,i,o,u}
  b) E= { Santa Fé, Buenos Aires, Mendoza, Chaco, Córdoba, …}
  c) F= {perro, elefante, ballena, hombre, murciélago,…}

### ACTIVIDAD Nº 4

- Completa con los signos de pertenencia, $\in$ y no pertenencia $\notin$, teniendo en cuenta los conjuntos de las actividades 2 y 3.
  a) a…….. D.
  b) Lunes………..A.
  c) Argentina………..E.
  d) Septiembre………..F.
  e) Escaleno…………..C.

## REPRESENTACION GRÁFICA.

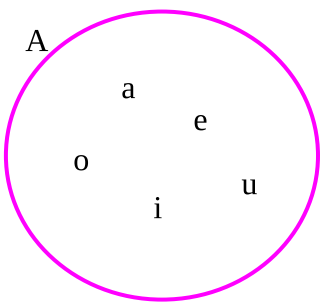


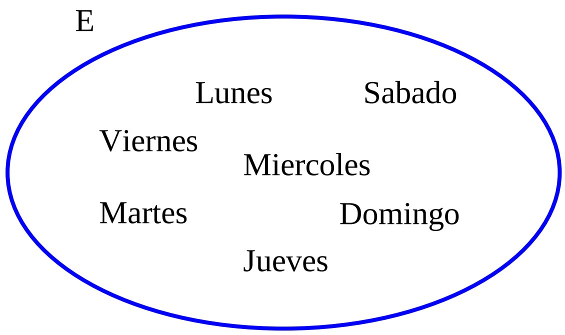
Otra forma de representar a un conjunto es mediante un diagrama de Venn. Esta nueva representación consiste en una curva simple y cerrada de manera tal que los elementos del conjunto quedan dentro de la misma, como puedes ver en el ejemplo.

¿Sabías que el nombre de diagrama de Venn es en honor a quien los difundió, John Venn?

Ejemplos:

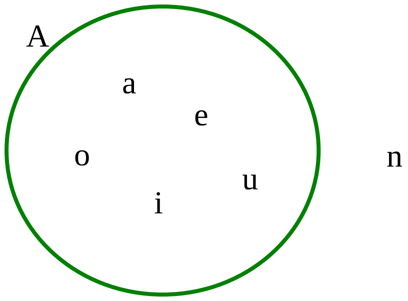
A = el conjunto de las vocales.




Si algún elemento no pertenece al conjunto la forma de representarlo es fuera de la curva cerrada.

Ejemplo:




$n \notin A$

## ACTIVIDAD Nº 5:

- Completa el diagrama de Venn de acuerdo a las siguientes indicaciones:
  a) X es el conjunto compuesto por figuras geométricas. (Coloca al menos 5 elementos)
  b) Ubica el elemento “pelota” en el diagrama.
  c) Ubica el elemento “cubo” en el diagrama.


## ACTIVIDAD Nº 6


- Observa los diagramas y responde “si o no”, en caso de ser la respuesta “no” justifica
  a) ¿ $2 \in A$?
  b) ¿ $3 \in A$?
  c) ¿f pertenece a A o a B?
  d) ¿ $5 \in B$?
  e) ¿ A = { x / x es un número impar} ?
  f) Expresa B por comprensión.

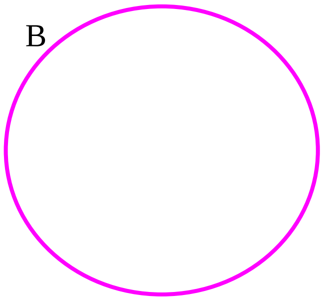
## <u>CONJUNTOS ESPECIALES.</u>

## ACTIVIDAD Nº 7:

(esta actividad se presenta resuelta con el fin de completar el trabajo, pero será utilizada como actividad introductoria para que la realicen solo los alumnos)

- Representa en un diagrama de Venn el siguiente conjunto B = {x / x son tus compañeros que calzan mas de 70}

*El grafico quedaría*:




A partir de la solución de la actividad anterior vamos a definir **el conjunto vacío.**

| |
|---|
| Se llama conjunto vacío, a todo conjunto sin elementos. |

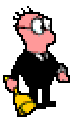
. "Como el conjunto vacío cumple un importante papel en la teoría de conjuntos tiene un símbolo propio Ø".

Podemos decir entonces que un conjunto puede estar formado por muchos, uno o ningún elemento

<u>Conjunto Universal</u>

Si se nos pide que formemos el conjunto de todos los alumnos que tienen ojos marrones, podríamos dudar si tenemos que considerar solamente a los de nuestro curso, a si se consideran a todos los alumnos de la escuela, ciudad o país.

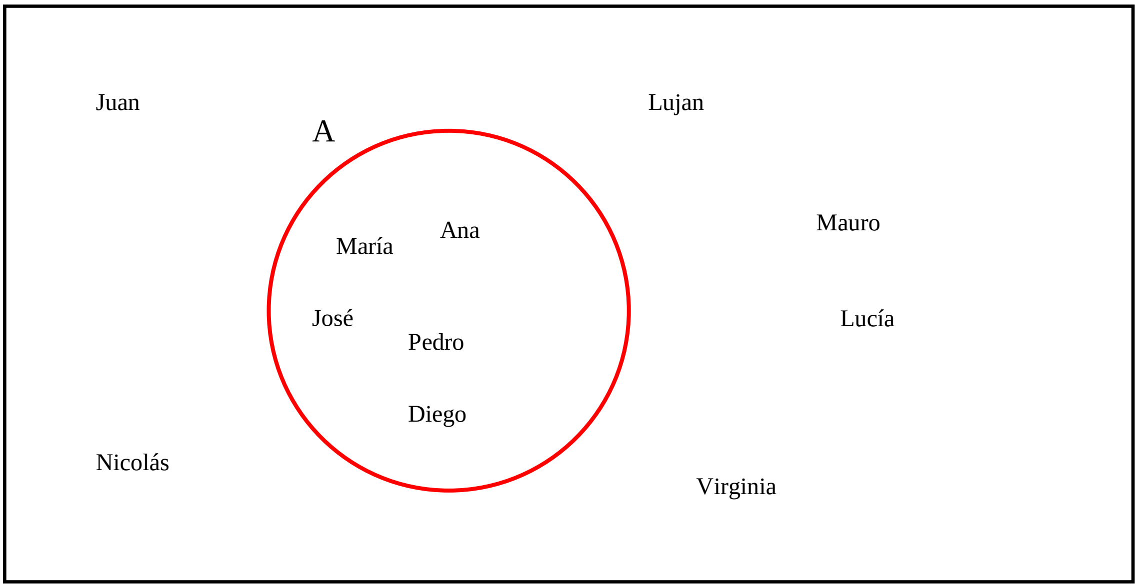
Para solucionar este problema usaremos un nuevo conjunto que nos permitirá distinguir el conjunto de alumnos del curso que no tienen ojos marrones, el conjunto de todos los alumnos de nuestro curso será el **conjunto universal**.



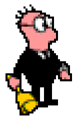
| |
|---|
| Un conjunto que contiene a todos los elementos posibles o al menos a todos los que van a considerarse en una situación dada, se llama conjunto universal. |

El diagrama de Venn de la situación planteada quedaría de la siguiente manera:

$\mathcal{U}$.

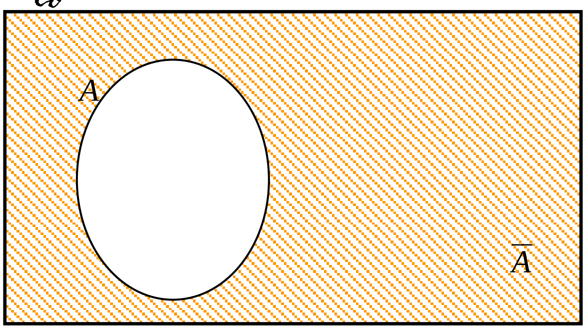



Donde A es el conjunto de todos los alumnos de ojos marrones y $\mathcal{U}$ es el total de los alumnos.



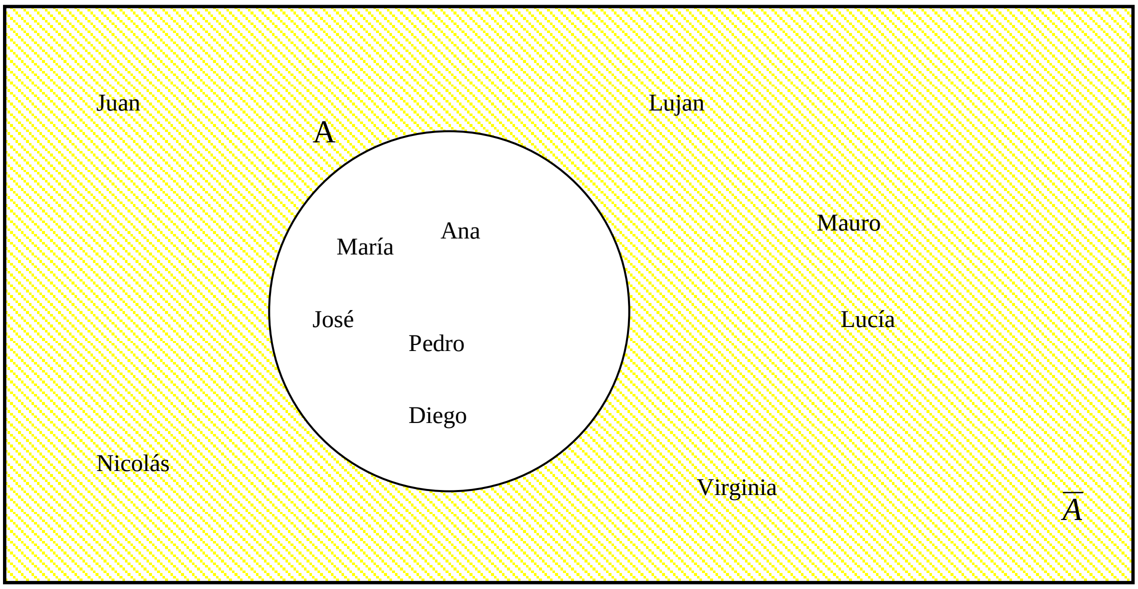
Dado un universal y un conjunto $A$, queda determinado otro conjunto formado por los elementos del universal que no pertenecen a $A$, al cuál llamaremos complemento de $A$ y lo designaremos $\overline{A}$. El diagrama de la situación anterior será.

$\mathcal{U}$




En el ejemplo de los alumnos de ojos marrones, el complemento será todos aquellos que no tengan ojos marrones.

$\mathcal{U}$.




En el diagrama podemos observar que A y su complemento forman el universal.

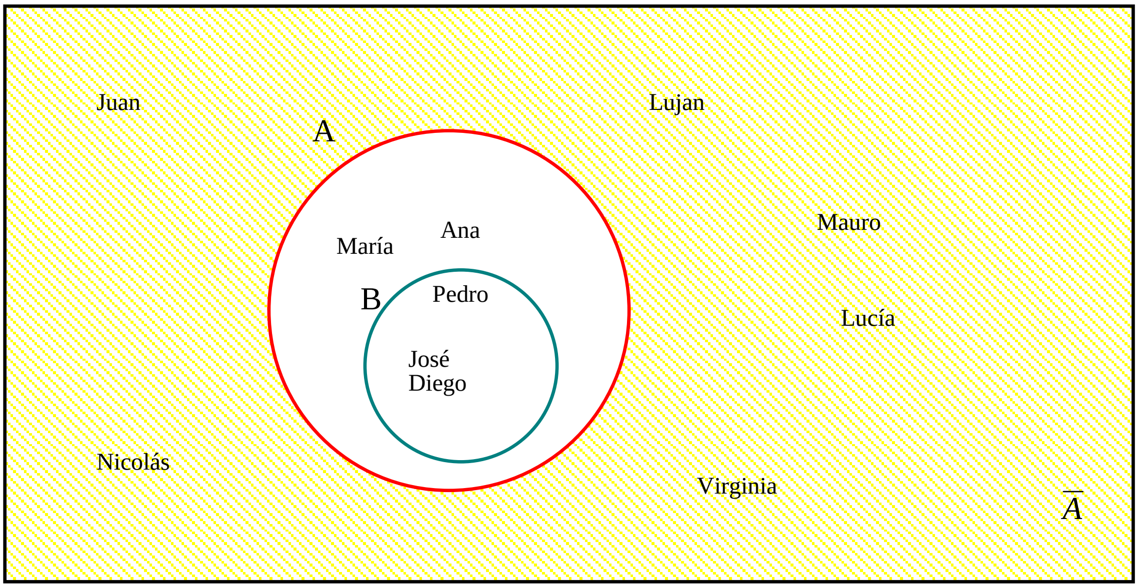
**ACTIVIDAD Nº 8** (la actividad se presenta resuelta con el fin de completar el trabajo, pero será utilizada como actividad introductoria para que la realicen solo los alumnos)

- A partir del universal: "los alumnos del curso", realizar el diagrama de Venn de todos aquellos que tengan ojos marrones son varones.

*La solución a este problema se podría obtener haciendo reflexionar a los alumnos a partir de los siguientes interrogantes:*

- ¿Los alumnos varones que tienen ojos marrones pertenecen al conjunto de alumnos que tienen ojos marrones?
- ¿Qué hacemos con las mujeres de ojos marrones?

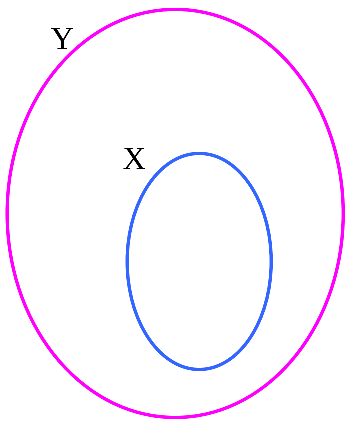
$\mathcal{U}$.




Sea A el conjunto de los alumnos de ojos marrones y B el conjunto de los alumnos de ojos marrones que son varones. Es fácil observar en el diagrama que todo elemento de B también es elemento de A, diremos entonces que B es un subconjunto de A.

Decimos que el conjunto X es un subconjunto del conjunto Y, o bien que X está incluido en Y, si y solo si todo elemento que pertenece a X pertenece a Y.

En símbolos indicaremos $X \subset Y$ y gráficamente:



## ACTIVIDAD Nº 9

- A partir del universal "El alfabeto":
  a) grafica la situación, diferenciando el subconjunto de las vocales. Distingue cada conjunto con un nombre.
  b) Nombra por extensión cada conjunto representado por las vocales y las consonantes.
  c) Indicar en el gráfico el conjunto de las vocales cerradas.
  d) ¿Cuál es el complemento del conjunto de las vocales?
  e) ¿Las vocales abiertas son parte del conjunto de las vocales?
  f) Indica el complemento de las consonantes.
  g) ¿ $\pi$ pertenece al Abecedario? ¿Qué conjunto formamos?

## OPERACIONES CON CONJUNTOS

- ¿Puedes decirme cuál es el resultado de 8 y 2?
- ¿El resultado de que operación?

Por supuesto, es imposible conocer el resultado si no se conoce el par de números y la operación. Cada par de números da un resultado distinto para cada operación. Por ejemplo no es lo mismo 8+2 que 8-2.

Ahora nos proponemos, operar con conjuntos…

De la misma manera a partir de dos conjuntos A y B obtenemos nuevos conjuntos como resultado de distintas operaciones entre ellos.

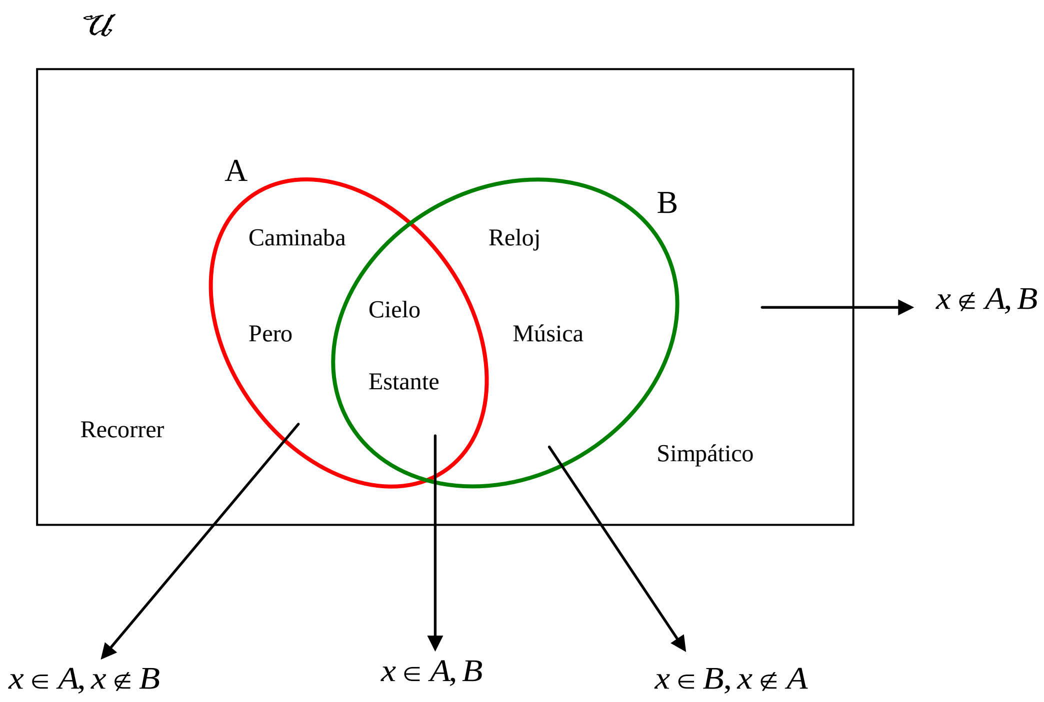
Aquí va un ejemplo:

*La profesora de lengua dio una lista de palabras: cielo- música-caminaba-reloj- recorrer- estante- simpática- pero. Pidió a una de sus alumnas, Laura, que formara el conjunto de palabras graves, y a otra, Camila, el conjunto de palabras sustantivos. Cada alumna formo su conjunto:*

Laura → A = {cielo, caminaba, estante, pero}

Camila → B = {cielo, música, reloj, estante}

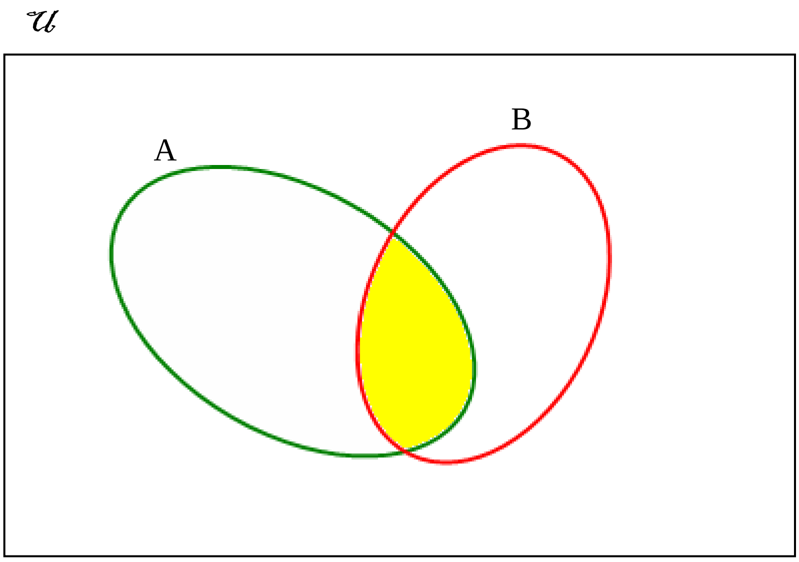
**Observemos** que: la palabra cielo y estante, pertenecen a los dos conjuntos, y que las palabras recorrer y simpático no pertenecen a ninguno de los conjuntos. **Realicemos** ahora el diagrama de Venn del conjunto universal.




Los conjuntos A y B determinan cuatro regiones en el conjunto universal. Cada región corresponde a un nuevo conjunto obtenido como resultado de una operación entre A y B.

Definimos, a continuación, algunas de las operaciones más importantes entre conjuntos:

## INTERSECCION:




La operación que da como resultado la región sombreada se llama **intersección** y se anota:

$A \cap B$

Todos los elementos representados en este nuevo conjunto pertenecen a A y a B.

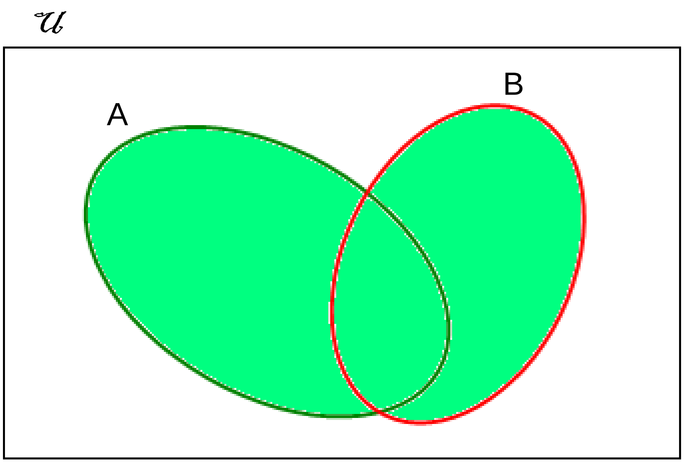
Si dos conjuntos no tienen elementos comunes su intersección será el conjunto vacío. Por ejemplo, dados los siguientes conjuntos:

S = {números pares}

G = {números impares}

$S \cap G = \emptyset$ pues no existe ningún número que sea par e impar a la vez. A este tipo de conjuntos se los llama **DISJUNTOS**, ya que su intersección es vacía.

## UNION:



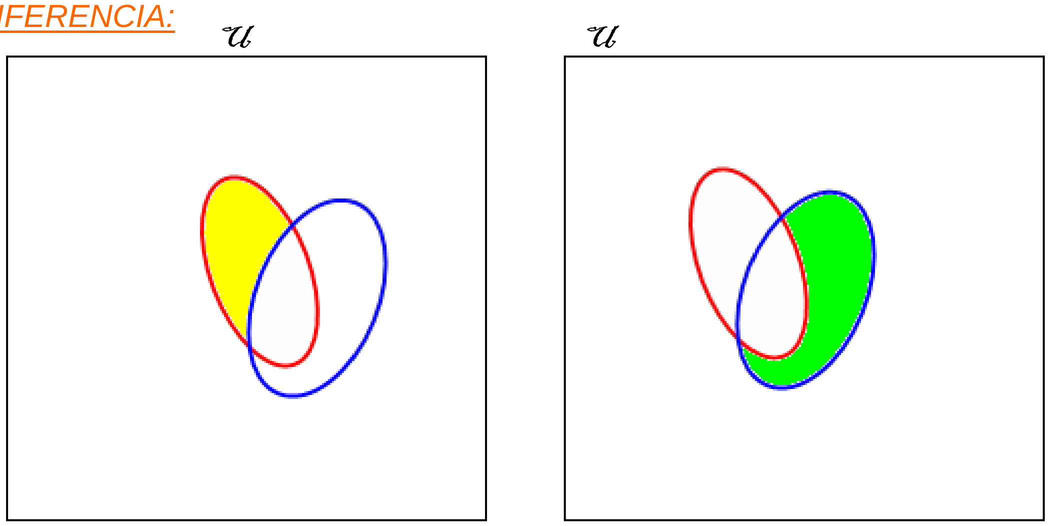

La operación que da como resultado el conjunto representado por la región sombreada se llama **unión** y se anota:

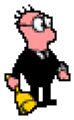
$A \cup B$

Todo elemento representado en este conjunto pertenece a A o a B o a ambos.

Retomando el ejemplo de las palabras, $A \cup B$= {pero, caminaba, cielo, estante, reloj, música} es decir palabra que son graves o que son sustantivos o que son sustantivos y graves.

## *DIFERENCIA:*



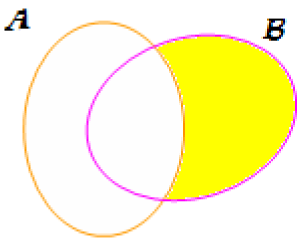
La operación que da como resultado el conjunto representado por las regiones sombreadas recibe el nombre de **conjunto diferencia**. En el diagrama de la izquierda tenemos $A-B$ y en el diagrama de la derecha $B-A$.
Se llama diferencia entre un conjunto A y otro B, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no a B.

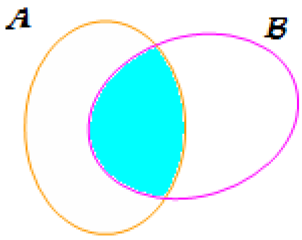
### ACTIVIDAD Nº 10

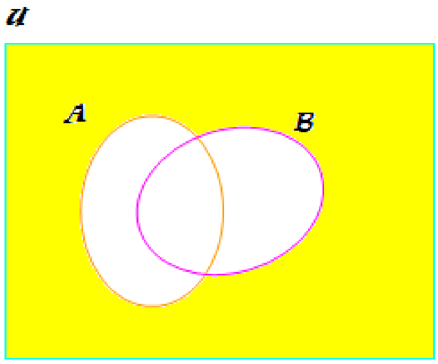
- Dado el universal los “alumnos de tercero naturales” y los conjuntos A={alumnas mujeres} y C={alumnos de ojos claros}:
  a) Representar la situación en un diagrama de Venn.
  b) Calcular y graficar $A \cap C$.
  c) Calcular y graficar $A - C$.
  d) Calcular y graficar $A \cup C$.
  e) Representar mediante el diagrama de Venn $\mathcal{U}$ menos $A \cup B$

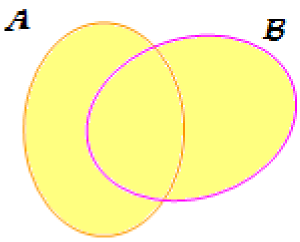
## ACTIVIDAD Nº 11

- Descubre las operaciones que quedan determinadas en los siguientes diagramas:




## CARDINAL DE UN CONJUNTO:

Llamamos **cardinal de un conjunto** A cualquiera, al número de elementos que este conjunto posee y lo denotamos #A.

| |
|---|
| Por ejemplo: A es el conjunto de las vocales, ¿cuál es el cardinal de A? |

¿Cuál es el cardinal del conjunto de los números naturales?, ¿cuál es el cardinal del conjunto de estrellas del sistema solar?, ¿cuál es el cardinal del conjunto de puntos que forman una recta? Existen conjuntos en los cuales contar la cantidad de elementos es una tarea imposible, ya que nunca terminaríamos de hacerlo. Estos conjuntos se llaman **infinitos** y su cardinal no es un número natural.

*Trabajo realizado por*

*María Luján Acastello y*

*Ma. Lucrecia  Pérez*

# BIBLIOGRAFÍA


- Klimovsky, G. y Boido, G: “Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática, una introducción”. Ed A-z editora. Buenos Aires. 2005.
- GLAESER, G.: “Matemática para profesores en formación”. Ed. Universitaria de Buenos Aires. Buenos Aires.1977.
- MUSSO, M. y otros: “Matemática 1”. Ed. Métodos. Capital Federal. 1996.
- Navarro, J. “La nueva matemática”; pág. 47 y ss.
- OURIÑA, L.: “Introducción a la teoría de conjuntos”. Ed. Eudeba manuales. Buenos Aires. 1976.
- ROJO, A. y otros: “Matemática 1” Ed. El ateneo. Buenos Aires. 1977.
- TAPIA: “Matemática 1”. Ed. Estrada. Buenos Aires. 1980.
- TIRAO, Juan A. : “Matemática 1”. Ed. Kapelusz. Buenos Aires. 1985.
- VARELA, L. y FONCUBERTA, Juan A.: “Matemática dinámica 1”. Ed. Kapelusz. Buenos Aires. 1973.